Lösung des Bundeswettbewerbs Mathematik 1999 (Facharbeit im LK Mathematik)

Dominik Brodowski (e-mail: mail@brodo)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Aufgabe 1 5
1. Aufgabenstellung 5
2. Einführung 5
3. Behauptung 5
4. Beweis 5
5. Folgerung 6

Kapitel 2. Aufgabe 2 7
1. Aufgabenstellung 7
2. Anmerkungen 7
3. Umformung der Folgen a_n und b_n 7
4. Beweis, dass a_n und b_n immer positiv sind 8
5. Hauptbeweis 8
6. Erster Schritt der Induktion 8
7. Zweiter Schritt der Induktion: Schluss von n auf $n+1$ 8
8. Folgerung 9

Kapitel 3. Aufgabe 3 11
1. Aufgabenstellung 11
2. Skizze 11
3. Definitionen 11
4. Voraussetzungen 11
5. Bestimmung der Koordinaten von S_1, S_2 und S_3 13
6. Abschluss des Beweises 14

Kapitel 4. Aufgabe 4 17
1. Aufgabenstellung 17
2. Anmerkung 17
3. Behauptung 17
4. Definitionen 17
5. Beziehung zwischen k und $4m(n)$ bei einem beliebigen konvexen Polyeder 17
6. Umformung des Euler'schen Polyedersatzes 18
7. Bezug auf die Bedingung 18
8. Abschluss des ersten Beweisschrittes 18
9. Zweiter Beweisschritt: Überprüfung der bisherigen Lösung sowie endgültige Lösung 19

10. Beweis der Existenz eines Polyeders mit 6 dreieckigen Seitenflächen und 5 Ecken 20
11. Ergebnis 21

Kapitel 5. Zusatz zu Aufgabe 4: Betrachtung von nicht-konvexen Polyedern 23
1. Definitionen 23
2. Überprüfung der ersten Beweisschritte 23
3. Der allgemeine Euler'sche Polyedersatz 24
4. Lösung für $p = 1$ 25
5. Lösung für $p > 1$ 27
6. Ergebnis 28

Kapitel 6. Anhang 31
1. Tabelle der Folgen a_n und b_n bis $n = 10$ (Aufgabe 2) 31

Kapitel 7. Literaturvereichnis 33

KAPITEL 1

Aufgabe 1

1. Aufgabenstellung

Auf 100 Affen werden 1600 Kokosnüsse verteilt, wobei einige Affen auch leer ausgehen können. Man beweise, dass es - ganz gleich, wie die Verteilung erfolgt - stets mindestens vier Affen mit derselben Anzahl von Kokosnüssen gibt.

2. Einführung

Ich beweise zunächst, dass die minimale Anzahl von Kokosnüssen, die benötigt wird, damit nie vier oder mehr der 100 Affen die gleiche Anzahl besitzen, größer als 1600 ist. Daraus folgt, dass eine solche Aufteilung bei nur 1600 Kokosnüssen nicht möglich ist. Daher bekommen stets mindestens vier Affen die gleiche Anzahl von Kokosnüssen.

3. Behauptung

Die minimale Anzahl von Kokosnüssen, die zur Erfüllung der Bedingung I bei 100 Affen notwendig ist, ist größer als 1600. *Bedingung (I)*: Es haben *nie* vier oder mehr Affen die gleiche Anzahl von Kokosnüssen.

4. Beweis

Den ersten drei Affen[1] wird die geringste mögliche Anzahl von Kokosnüssen gegeben, damit die Bedingung I noch gilt: 0 Stück.

Den nächsten drei Affen wird dann, um möglichst sparsam zu sein, je 1 Kokosnuss gegeben, den nächsten 3 dann je 2 usw. Der 97., 98. und 99. Affe erhält demnach je 32 Kokosnüsse.

Dafür werden $3 \cdot \sum_{v=1}^{32} = 1584$ Kokosnüsse benötigt, wobei jeweils 3 Affen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots 31, 32$ Kokosnüsse besitzen.

[1]Da die Affen beliebig angeordnet werden können, schließt "die ersten drei" jede mögliche Anordnung der Affen ein. Auswirkungen auf den Beweis hat dies jedoch nicht, Dasselbe gilt für die anordnung der Affen im weiteren Verlauf des Beweises.

Es kann kein Affe weniger als 0 Kokosnüsse besitzen, und jede Anzahl zwischen 0 und 32 wurde maximal ausgenützt [2]. Da nun $\mathbb{N}_0^+$ wohlgeordnet [3] ist, folgt daraus, dass dies die Aufteilung mit dem geringsten Bedarf an Kokosnüssen ist, bei der die Bedingung I erfüllt ist.

Der 100. Affe benötigt allerdings minimal 33 Stück, damit die Bedingung I weiterhin zutrifft. Dies erhöht jedoch den Bedarf auf mindestens 1617, also über 1600.

5. Folgerung

Wie ich soeben bewiesen habe, benötigt man mehr als 1600 Kokosnüsse, um diese auf 100 Affen unter Beachtung der Bedingung I aufzuteilen. Somit kann diese Bedingung *nicht* erfüllt werden, wenn man nur 1600 Kokosnüsse zur Verfügung hat.

Daher haben, ganz gleich, wie die Verteilung erfolgt, stets mindestens 4 Affen dieselbe Anzahl von Kokosnüssen. q.e.d.

[2] Bei einer Vergabe der gleichen Anzahl von Kokosnüssen an 4 Affen wird die Bedingung I nicht mehr erfüllt. Daher darf die gleiche Anzahl maximal an 3 Affen verteilt werden.

[3] Definition und Begründung für $\mathbb{N}^+$ in [3] (Neuntes Kapitel - Ordnung und Wohlordnung von Mengen - §68 Geordnete Mengen - S. 209). Analog gilt die Wohlordnung für $\mathbb{N}_0^+$, wenn man das Element 0 den Elementen aus $\mathbb{N}^+$ voranstellt.

Aufgabe 2

1. Aufgabenstellung

Zwei Zahlenfolgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ werden definiert durch $a_1 = b_1 = 1$,
$a_{n+1} = a_n + b_n$
$b_{n+1} = a_n \cdot b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

Man beweise, dass die Glieder der ersten Folge paarweise teilerfremd sind.

Begriffserklärung: Die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heißen paarweise teilerfremd, wenn für je zwei verschiedene Indizes i, j die Zahlen a_i und a_j den größten gemeinsamen Teiler 1 haben.

2. Anmerkungen

Bei Verwendung des Begriffs "Teiler" ist immer eine natürliche Zahl größer 1 gemeint.

Im Anhang sind die Folgen a_n, b_n bis $n = 10$ abgedruckt.

3. Umformung der Folgen a_n und b_n

Aus $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ folgt durch n-faches Ersetzen von b_{n-x} [1]:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= a_n \cdot (a_{n-1} \cdot b_{n-1}) \\
&= a_n \cdot an - 1 \cdot (a_{n-2} \cdot b_{n-2}) \\
&= a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-3} \cdot \ldots \cdot a_2 \cdot a_1 \\
&= \prod_{v=1}^{n} a_v
\end{aligned}$$

Durch Ersetzen von b_n ergibt sich daher aus $a_{n+1} = a_n + b_n$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-3} \cdot \ldots \cdot a_2 \cdot a_1 \\
&= a_n + \prod_{v=1}^{n-1} a_v
\end{aligned}$$

[1] Definition des Symbols $\prod$ in [3] (Zweites Kapitel - Gruppen - § 6 Der Gruppenbegriff - Zusammengesetzte Produkte und Summen; Potenzen - S. 17 f.).

4. Beweis, dass a_n und b_n immer positiv sind

Es wird durch vollständige Induktion bewiesen, dass $a_n, b_n (n \in \mathbb{N})$ immer positiv sind.

Erster Schritt der Induktion. $a_n = b_n = 1$ sind positiv.

Zweiter Schritt der Induktion. Es gilt die Induktionsvoraussetzung, dass an und bn positiv sind. Es bleibt zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung a_{n+1} sowie b_{n+1} positiv sind.

$a_{n+1} = a_n + b_n$ ist positiv, da a_n und b_n nach der Induktionsvoraussetzung positiv sind und die Summe zweier positiver Zahlen stets positiv ist.

$b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ ist positiv, da an und bn nach der Induktionsvoraussetzung positiv sind und das Produkt zweier positiver Zahlen stets positiv ist.

Folgerung. Somit ist a_n und b_n für jedes $n \in N$ positiv (I).

Da das Produkt beliebig vieler positiver Zahlen auch positiv ist, gilt:

$\prod_{v=1}^{n-1} a_v$ ist stets positiv $(n \in \mathbb{N})$ (II).

5. Hauptbeweis

Es ist zu zeigen, dass alle Zahlenpaare (a_i, a_n) mit $i, n \in \mathbb{N}$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen.

Dies wird durch vollständige Induktion bewiesen.

6. Erster Schritt der Induktion

Es gilt nach der Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 & b_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 & b_2 &= 1 \\ a_3 &= 3 & b_3 &= 2 \end{aligned}$$

Da die Zahlenpaare $(1, 2); (1, 3); (2, 3)$ den größten gemeinsamen Teiler 1 besitzen, ist bis $a = 3$ bewiesen, dass die Glieder der Folge a_n paarweise teilerfremd sind.

7. Zweiter Schritt der Induktion: Schluss von n auf $n + 1$

Unter der Induktionsvoraussetzung, dass die Folge an bis einschließlich n paarweise teilerfremd ist, beweise ich nun mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises, dass dies dann auch für die Folge a_n bis einschließlich $(n + 1)$ zutrifft.

Widerspruchsbehauptung: Es wird angenommen, a_{n+1} habe einen gemeinsamen Teiler $k > 1$ mit a_i.[2]

Daraus folgt:

$$\frac{a_{n+1}}{p} = \frac{a_i}{q} = k \qquad (III)$$
$$p, q, k \in N \qquad (IV)$$
$$i < n+1 \qquad (V)$$
$$k > 1$$

Es gilt allgemein:

$$a_{n+1} = a_n + \prod_{v=1}^{n-1} a_v$$

Die Gleichung wird durch k divdiert ($k > 0$ nach IV)

$$\frac{a_{n+1}}{k} = \frac{a_n}{k} + \frac{\prod_{v=1}^{n-1} a_v}{k}$$

Aus III folgt:

$$p = \frac{a_n}{k} + \frac{\prod_{v=1}^{n-1} a_v}{k}$$

Aus $k > 0$ (IV) und I sowie II folgt, dass die Summanden der rechten Seite positiv sind.

Aus der Widerspruchsbehauptung folgt, dass mindestens ein ai den Faktor k enthält. Daher ist einer der beiden Summanden auf der rechten Seite ganzzahlig. Da p ebenfalls ganzzahlig ist (IV), muss der andere Summand der rechten Seite auch ganzzahlig sein. Damit dies zutrifft, müssen entweder k oder die Primfaktoren von k in weiteren Folgegliedern bis einschließlich an enthalten sein. Damit ist allerdings die Folge a_n bis n nicht paarweise teilerfremd. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur (Induktions-) Voraussetzung.

Daraus folgt, dass a_{n+1} keinen gemeinsamen Teiler mit einem $a_i, i \leq n$ haben kann.

8. Folgerung

Es wurde bewiesen, dass die Folge a_n bis zum $(n+1)$-ten Element paarweise teilerfremd ist, wenn dies bis zum n-ten Element gilt. Da außerdem rechnerisch bestätigt wurde, dass dies bis a_3 zutrifft, ist der Induktionsbeweis vollständig.

[2] Es ist für den Beweis unerheblich, ob a_{n+1} noch mit weiteren Folgegliedern außer a_i einen gemeinsamen Teiler größer 1 besitzt. Bereits die Existenz nur eines Teilers größer 1 widerspricht der Induktionsvoraussetzung (Die Folge a_n ist bis n paarweise teilerfremd).

Daraus folgt, dass alle Glieder der Folge an paarweise teilerfremd sind q.e.d.

KAPITEL 3

Aufgabe 3

1. Aufgabenstellung

In einer Ebene werden auf dem geraden Streckenzug ABC über AB, BC und CA als Grundseiten die positiv orientierten gleichschenkligen Dreiecke ABS_1, BCS_2 und CAS_3 mit den Basiswinkeln 30° errichtet. Man beweise: Das Dreieck $S_3S_2S_1$ ist gleichseitig.

2. Skizze

Anmerkung: Für den Beweis ist es von keiner Bedeutung, ob B näher an A, näher an C oder genau in der Mitte von AC liegt.

3. Definitionen

Man führe ein kartesisches Koordinatensystem so ein, dass der Ursprung auf A liegt, die waagrechte Achse durch AC verläuft und das Dreieck ABS_1 im 1. Quadranten liegt. (I)

Dabei sei $a = \overline{AB}, b = \overline{BC}, c = \overline{AC}$. (II)
P_i sei das von S_i auf AC gefällte Lot. (III)
xs_i sei die x-Koordinate, ys_i die y-Koordinate von S_i. (IV)

4. Voraussetzungen

Aus der Aufgabenstellung folgt: $c = a + b$ (V), da der Streckenzug ABC gerade ist.

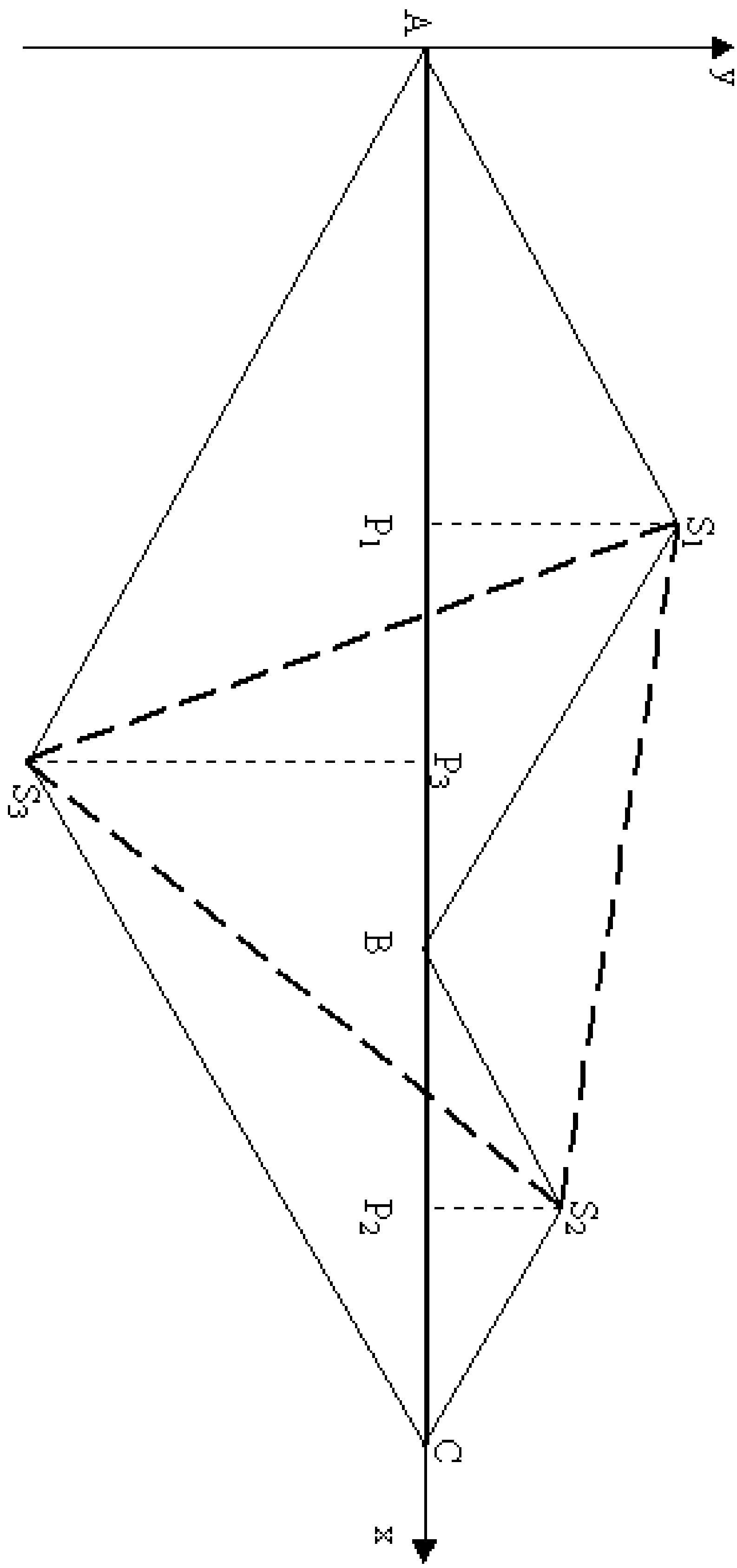
Das Dreieck ABS_1 ist gleichschenklig mit einem Basiswinkel von 30°:

$$\Rightarrow \quad \overline{AS_3} = \overline{CS_3} \qquad (VIa)$$
$$\Rightarrow \quad \overline{AS_1} = \overline{BS_1} \qquad (VIIa)$$

Das Dreieck BCS_2 ist gleichschenklig mit einem Basiswinkel von 30°

$$\Rightarrow \quad \angle CBS_2 = \angle S_2CB = 30° \qquad (VIb)$$
$$\Rightarrow \quad \overline{BS_2} = \overline{CS_2} \qquad (VIIb)$$

Das Dreieck CAS_3 ist gleichschenklig mit einem Basiswinkel von 30°


A
y
P1
S1
P3
S3
B
P2
S2
C
x

$$\Rightarrow \quad \angle S_3AC = \angle ACS_3 = 30° \qquad (VIc)$$
$$\Rightarrow \quad \angle BAS_1 = \angle S_1BA = 30° \qquad (VIIc)$$

5. Bestimmung der Koordinaten von S_1, S_2 und S_3

Wegen III und I ist die x-Koordinate von S_1 identisch mit derjenigen von P_1.

Nun gilt nach dem SsW-Satz[1]:

$$\begin{aligned} \angle S_1P_1A = \angle BP_1S_1 = 90° &\qquad (III) \\ \triangle AP_1S_1 \cong \triangle P_1BS_1 &\qquad (VIIa) \\ \overline{P_1S_1} = \overline{S_1P_1} & \\ \Rightarrow \overline{AS_1} = \overline{BS_1} & \end{aligned}$$

Daher ist $\overline{AP_1} = \overline{P_1B}$. Daraus und aus III folgt, dass P_1 die Strecke AB halbiert.

$$\overline{AP_1} = \overline{P_1B} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a}{2} \qquad (VIIIa)$$

Wegen I und III ist daher die x-Koordinate von S_1 gleich $\frac{a}{2}$.

Nach den trigonometrischen Sätzen und nach VIa gilt im rechtwinkligen Dreieck AP_1S_1:

$$\begin{aligned} tan30° &= \frac{\overline{P_1S_1}}{\overline{AP_1}} = 2 \cdot \frac{\overline{P_1S_1}}{a} \qquad (VIIIa) \\ \overline{P_1S_1} &= \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Wegen I ist daher die y-Koordinate von S_1 gleich $\frac{a}{6}\sqrt{3}$. (IXa)

Somit gilt nach VIIIa und IXa sowie analog für S_2 und S_3

$$\begin{aligned} S_1 \quad & (\frac{a}{2}|\frac{a}{6}\sqrt{3}) \qquad (X) \\ S_2 \quad & (a + \frac{b}{2}|\frac{b}{6}\sqrt{3}) \qquad (XI) \\ S_3 \quad & (\frac{c}{2}|-\frac{c}{6}\sqrt{3}) \qquad (XII) \end{aligned}$$

Aus dem Satz des Pythagoras ergeben sich aus IV, X, XI und XII folgende Streckenlängen $\overline{S_1S_2}, \overline{S_1S_3}$ und $\overline{S_2S_3}$:

[1]Schreibweise SsW nach [4]: “Wenn Dreiecke in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren übereinstimmen, dann sind sie kongruent.”

$$
\begin{aligned}
\overline{S_1S_2} &= \sqrt{(xs_1 - xs_2)^2 + (ys_1 - ys_2)^2} \\
&= \sqrt{(\frac{a}{2} - a - \frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{6}\sqrt{3} - \frac{b}{6}\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2) + \frac{3}{36}(a^2 - 2ab - b^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{12}(3a^2 + 6ab + 3b^2 + a^2 - 2ab + b^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{S_1S_3} &= \sqrt{(xs_1 - xs_3)^2 + (xs_1 - ys_3)^2} \\
&= \sqrt{(\frac{a}{2} - \frac{c}{2})^2 + (\frac{a}{6}\sqrt{3} + \frac{c}{6}\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}(a^2 - 2ac + c^2) + \frac{3}{36}(a^2 + 2ac + c^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{12}(3a^2 - 6ac + 3c^2 + a^2 + 2ac + c^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - ac + c^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{S_2S_3} &= \sqrt{(xs_2 - xs_3)^2 + (x2_2 - ys_3)^2} \\
&= \sqrt{(a + \frac{b}{2} - \frac{c}{2})^2 + (\frac{b}{6}\sqrt{3} + \frac{c}{6}\sqrt{3})^2} \qquad (a = c - b[V]) \\
&= \sqrt{(c - b + \frac{b}{2} - \frac{c}{2})^2 + (\frac{b}{6}\sqrt{3} + \frac{c}{6}\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}(c - b)^2 + \frac{3}{36}(b^2 + 2bc + c^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{12}(3c^2 - 6bc + 3b^2 + b^2 + 2bc + c^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}(b^2 - bc + c^2)}
\end{aligned}
$$

6. Abschluss des Beweises

Nun bleibt zu zeigen, dass $\overline{S_1S_3} = \overline{S_1S_2}$ sowie $\overline{S_2S_3} = \overline{S_1S_2}$ ist.

$$\begin{aligned}
\overline{S_1S_3} &= \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - ac + c^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - a(a+b) + (a+b)^2)} \qquad [V] \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - a^2 - ab + a^2 + 2ab + b^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)} \\
&= \overline{S_1S_2} \\
\overline{S_2S_3} &= \sqrt{\frac{1}{3}(b^2 - bc + c^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}(b^2 - b(a+b) + (a+b)^2)} \qquad [V] \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}(b^2 - ab - b^2 + a^2 + 2ab + b^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)} \\
&= \overline{S_1S_2}
\end{aligned}$$

Somit ist $\overline{S_1S_2} = \overline{S_1S_3} = \overline{S_2S_3}$, daher ist das Dreieck $S_1S_3S_2$ gleichseitig q.e.d.

KAPITEL 4

Aufgabe 4

1. Aufgabenstellung

Es gibt konvexe Polyeder mit mehr Seitenflächen als Ecken. Was ist die kleinste Anzahl von dreieckigen Seitenflächen, die ein solcher Polyeder haben kann? (Beweis!)

Begriffserklärung: Ein Körper heißt konvex, wenn er zusammen mit je zweien seiner Punkte auch alle Punkte ihrer Verbindungsstrecke enthält.

2. Anmerkung

In Kapitel 5 wird diese Aufgabe für nicht-konvexe Polyeder gelöst.

3. Behauptung

Die kleinste Anzahl von dreieckigen Seitenflächen, die ein konvexer Polyeder mit mehr Seitenflächen als Ecken haben kann, ist 6.

4. Definitionen

Ein konvexer Polyeder habe e Ecken, f Seitenflächen und k Kanten.

Man definiere eine Funktion $m(n), n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3$, die als Funktionswert die Anzahl der n-eckigen Seitenflächen des Polyeders liefert. (z.B. $m(3)$: Anzahl der dreieckigen Seitenflächen).

5. Beziehung zwischen k und $4m(n)$ bei einem beliebigen konvexen Polyeder

Da jede Seitenfläche eine eindeutige Anzahl von Ecken (≥ 3) hat, gilt:

$$(1) \qquad \sum_{v=3}^{\infty} m(v) = f$$

Nun bildet man folgende Summe:

$$(2) \qquad c = \sum_{v=3}^{\infty} v \cdot m(v)$$

Dies entspricht der Summe der jeweiligen Seiten der Seitenflächen. Jedes Dreieck hat 3 Seiten; demzufolge ist die Summe der Seiten der dreieckigen Seitenflächen gleich $3 \cdot m(3)$ usw. In c wird jede Kante des konvexen Polyeders genau zweifach gezählt, da jede Kante des konvexen Polyeders aus stets je einer Seite zweier verschiedener Seitenflächen gebildet wird. Daher gilt:

$$k = \frac{c}{2} \tag{3}$$

6. Umformung des Euler'schen Polyedersatzes

Nach dem Euler'schen Polyedersatz gilt für konvexe Polyeder:

$$\begin{aligned} e &+ f = k + 2 \\ e &= k + 2 - f \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (3) ergibt sich:

$$e = \frac{c}{2} + 2 - f \tag{4}$$

7. Bezug auf die Bedingung

Nun soll für diesen Polyeder gelten:

$$\begin{aligned} f &> e \\ f &> (c/2) - f + 2(4) \\ 4f &> c + 4 \end{aligned}$$

8. Abschluss des ersten Beweisschrittes

Durch einsetzen von (1) und (2) folgt

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sum_{v=3}^{\infty} m(v) &> \sum_{v=3}^{\infty} v \cdot m(v) \\ 0 &> 4 + \sum_{v=3}^{\infty} (v-4) \cdot m(v) \end{aligned}$$

$v = 3$ und $v = 4$ werden aus dem Summenzeichen extrahiert

$$\begin{aligned} 0 &> 4 + (3-4) \cdot m(3) + (4-4) \cdot m(4) + \sum_{v=5}^{\infty} (v-4) \cdot m(v) \\ 0 &> 4 - m(3) + \sum_{v=5}^{\infty} (v-4) \cdot m(v) \end{aligned}$$

$$m(3) > 4 + \sum_{v=5}^{\infty} (v-4) \cdot m(v) \tag{5}$$

Da nun $m(n)$ per Definition immer größer oder gleich 0 ist, und $(v-4)$ größer 0 ist, sofern v größer 4 ist, folgt:

$$(v-4)\cdot m(v) \geq 0 \forall v > 4$$

Die Summe beliebig vieler Zahlen, die größer oder gleich 0 sind, ist ebenso größer oder gleich 0. Daraus ergibt sich:

$$\sum_{v=5}^{\infty} (v-4)\cdot m(v) \quad \geq \quad 0$$

Daher gilt:

$$m(3) \quad > \quad 4$$

Es muss also minimal 5 dreieckige Seitenflächen geben, damit ein Polyeder mehr Seitenflächen als Ecken haben kann.

9. Zweiter Beweisschritt: Überprüfung der bisherigen Lösung sowie endgültige Lösung

Es wird nun überprüft, ob ein konvexer Polyeder mit genau 5 dreieckigen Seitenflächen existiert. Dabei werden 3 Fälle unterschieden.

9.1. Der Polyeder besteht nur aus 5 dreieckigen Seitenflächen ($\sum_{v=4}^{\infty} m(v) = 0$). c ist bei einem Polyeder, der nur aus 5 dreieckigen Seitenflächen bestehen würde, gleich 15. In diesem Fall ist die Anzahl der Kanten nach (3) gleich $k = \frac{c}{2} = 7,5$, und daher kann dieser nicht existieren.

9.2. Der Polyeder besteht nur aus 5 dreieckigen und beliebig vielen viereckigen Seitenflächen ($\sum_{v=5}^{\infty} m(v) = 0 \wedge m(4) \neq 0$). Nach (2) gilt:

$$c \quad = \quad 3\cdot m(3) + 4\cdot m(4)$$

Aus (3) folgt:

$$k \quad = \quad \frac{c}{2} = 7,5 + 2\cdot m(4)$$

Da nun $2\cdot m(4)$ eine ganze Zahl ist, ergäbe sich für k und damit der Anzahl der Kanten eine nicht ganzzahlige Lösung. Ein solcher Polyeder kann daher nicht existieren.

9.3. Der Polyeder besteht außer den 5 dreieckigen Seitenflächen noch mindestens aus einer Seitenfläche mit mehr als 4 Ecken ($\sum_{v=5}^{\infty} m(v) \neq 0$). (Anzahl der viereckigen Seitenflächen ist unerheblich)

In diesem Fall ergibt sich für die Summe $\sum_{v=5}^{\infty} (v-4) \cdot m(v)$, die Bestandteil der Ungleichung (5) ist, ein Wert größer oder gleich 1. Daher müsste $m(3)$ größer 5 sein. Dies ist aber ein Widerspruch zur Beschreibung des Polyeders.

Es wurde gezeigt, dass ein konvexer Polyeder mit 5 dreieckigen Seitenflächen nicht existieren kann. Daher muss ein Polyeder minimal 6 dreieckige Seitenflächen aufweisen, damit er mehr Seitenflächen als Ecken haben kann.

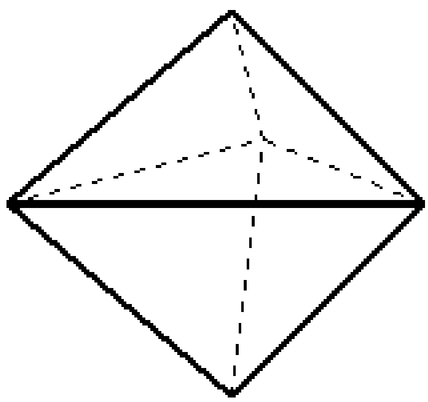
10. Beweis der Existenz eines Polyeders mit 6 dreieckigen Seitenflächen und 5 Ecken

Ich beweise nun, dass mindestens ein Polyeder mit 6 dreieckigen Seitenflächen existiert, bei dem die Anzahl der Seitenflächen größer als die Anzahl der Ecken ist.

Ein regelmäßiges Tetraeder[1] hat 4 gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen, sowie 4 Ecken.

Zwei kongruente regelmäßige Tetraeder werden nun derart aufeinandergelegt, dass zwei Seitenflächen deckungsgleich aneinander liegen (siehe Skizze). Da je 3 Ecken der 2 Tetraeder zusammenfallen, besteht der resultierende Polyeder besteht aus 5 Ecken, sowie aus 6 Seitenflächen, denn je eine Seitenfläche des Polyeders ist nun keine Seitenfläche mehr. Die Seitenflächen sind jeweils dreieckig.

Skizze:



[1]Existenz und Eigenschaft eines regelmäßigen Tetraeders: siehe [5], Seite 127.

Daher existiert mindestens ein Polyeder mit 6 dreieckigen Seitenflächen, bei dem die Anzahl der Seitenflächen größer als die Anzahl der Ecken ist.

11. Ergebnis

Somit wurde eindeutig gezeigt, dass ein konvexer Polyeder mindestens 6 dreieckige Seitenflächen haben muss, damit er mehr Seitenflächen als Ecken aufweist, und dass mindestens ein solcher Polyeder existiert. q.e.d.

KAPITEL 5

Zusatz zu Aufgabe 4: Betrachtung von nicht-konvexen Polyedern

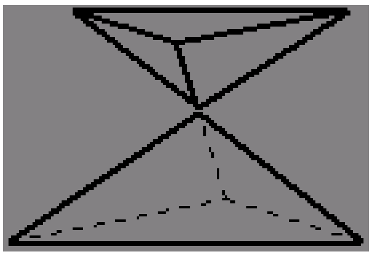
1. Definitionen

Analog zu den bei der Bestimmung der "Polyederformel" in [6] auf den Seiten 165ff. verwendeten Begriffen möchte ich hier festlegen:

Definition: Ein Polyeder sei eine geschlossene Fläche F, die aus beliebig vielen einfachen geschlossenen Flächenstücken S aufgebaut ist. (A)

Es gelten noch folgende Einschränkungen:

* Jede Berührungslinie zwischen zwei benachbarten Seitenflächen sei eine Kante, und eine solche Kante darf nicht durch mehr als zwei Seitenflächen gebildet werden. (B)
* Eine Ecke sei der Schnittpunkt mindestens dreier Kanten. Alle Kanten müssen dabei von Flächenstücken gebildet werden, die untereinander aneinandergrenzen. (C) Insofern ist folgende Figur kein Polyeder: zwei Tetraeder, die nur an einer Ecke verbunden sind:



* Bei einem Polyeder im eigentlichen Sinn seien die Flächenstücke jeweils planare n-Ecke (D), und die Fläche sei in einem linearen, kartesischem Koordinatensystem gelegen.

Anmerkung: Hier seien nur "Polyeder im eigentlichen Sinn" behandelt. Andere erfordern weitere differenzialgeometrische und topologische Betrachtungen, und eine Beschäftigung mit diesen würde hier zu weit führen.

2. Überprüfung der ersten Beweisschritte

Ich überprüfe nun, inwieweit diejenigen Aussagen, die über konvexe Polyeder im Beweis zur Aufgabe 4 (Kapitel 4) bis einschließlich Abschnitt 5 getätigt wurden, auch auf allgemeine Polyeder zutreffen:

2.1. Die geringste Anzahl der Ecken einer Seitenfläche ist 3. Da ein Polyeder vollständig aus Flächenstücken, die n-Ecke sind, aufgebaut ist (D), und n-Ecke mindestens 3 Ecken aufweisen, folgt die Gültigkeit dieses Satzes auch für Polyeder allgemein.

2.2. $\sum_{v=3}^{\infty} m(v) = f$**.** Die (Ober-)Fläche eines Polyeders wird vollständig durch die Flächenstücke, die mindestens 3 Ecken aufweisen, gebildet (A). Daher gilt obige Formel allgemein für Polyeder.

2.3. $c = \sum_{v=3}^{\infty} v \cdot m(v)$ **ist die Summe der Seiten der Seitenflächen.** Jedes n-Eck, das v Ecken hat, hat auch v Kanten. Aus 2.1 und 2.2 folgt dann, dass c tatsächlich die Summe der Seiten der Seitenflächen (=Flächenstücke) eines Polyeders ist.

2.4. $k = \frac{c}{2}$**.** Dies ergibt sich aus (A) eindeutig.

3. Der allgemeine Euler'sche Polyedersatz

Im nächsten Beweisschritt (Kap. 4, 6) wurde der Euler'sche Polyedersatz verwendet.

Ich möchte hier nun den Beweis in modifizierter Form skizzieren, der für eine allgemeine Form des Euler'schen Polyedersatzes in [6], Seite 165ff., angeführt wird:

Aus der Definition (A,B,C) eines Polyeders folgt, dass er den Raum derart in zwei vollständig von einander getrennte Teile unterteilt, so dass eine Seite der Fläche stets zur Innenseite, die andere Seite stets zur Außenseite gerichtet ist. Dies bezeichnet man als "zweiseitig" bzw. "orientierbar".

Jeder Polyeder hat nun eine charakteristische Zahl, das Geschlecht. Diese Zahl p gibt nach [7], Bd. 8, "Geschlecht 4)" an, wie viele "Löcher" diese Fläche aufweist. Außerdem ist an gleicher Stelle in [7] angegeben, dass sich eine solche orientierbare Fläche F homöomorph auf einer Kugel mit p Henkeln abbilden lässt. (Eine Kugel mit einem Henkel bezeichnet man als Torus usw.). Homöomorph bedeutet nun, dass diese Abbildung ohne Einfluss auf das Geschlecht sowie die Anzahl der Ecken e, der Flächen f, und der Kanten k ist. Die aufgrund dieser Projektion entstandene reguläre, orientierbare Fläche, d.h. die Kugel mit p Henkeln, bezeichnet man als Fr, und die Seitenflächen als Sr.

Für jedes Flächenstück Sr gilt nach GAUSS-BONNET aufgrund der gegebenen Eigenschaften:

$\int_{Sr} \frac{ds}{\sigma_g} + \sum_{Sr} \omega + \int_{Sr} K do = 2\pi$, wobei ω die Außenwinkel an den Ecken des Flächenstücks darstellen ($0 \leq \omega \leq \pi$). Diese werden nun durch die Innenwinkel $\phi = \pi - \omega$ ersetzt:

$$\int_{Sr} \frac{ds}{\sigma_g} + \sum_{Sr} \pi - \phi + \int_{Sr} K do = 2\pi$$

Addiert man nun diese Gleichungen für alle Flächenstücke, so erhält man:

$$\sum_{Fr} (\pi - \omega) + \int_{Fr} K do = 2\pi \cdot f \tag{6}$$

Die der Kanten zugehörigen Integrale $\int_{Sr} \frac{ds}{\sigma_g}$ heben sich weg, da sie wegen der Orientierbarkeit der Fläche Fr genau zweimal mit unterschiedlichen Vorzeichen addiert werden.

Es gilt nun: $\sum_{Fr} (\pi - \omega) = \pi \cdot 2k - \sum_{Fr} \omega$, da die Anzahl der Innenwinkel je Seitenfläche gleich der Anzahl der Seiten der Seitenfläche ist, und es nach 2.4 doppelt so viele Seiten der Seitenflächen wie Kanten gibt. Die Innenwinkel an einer Ecke addieren sich jeweils zu 2π , demnach ist dann

$$\sum_{Fr} (\pi - \omega) = 2\pi \cdot k - 2\pi \cdot e \tag{7}$$

Durch Einsetzen von (6) in (7) und Division durch 2π ergibt sich:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{Fr} K do = f - k + e$$

Nun gilt für die Gesamtkrümmung $\int_{Fr} K do$ einer geschlossenen Fläche nach Satz 81_p in [6] (S. 166) $\int_{Fr} K do = 4 \cdot \pi(1 - p)$, wobei p das Geschlecht der Fläche ist.

Daraus folgt:

$$f + e = k + 2 \cdot (1 - p)$$

Da die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten sowie das Geschlecht der Flächen F und Fr gleich sind, folgt daraus, dass der Satz $f + e = k + 2 \cdot (1 - p)$ für jeden Polyeder gilt.

Für $p = 0$, und das ist das Geschlecht aller *konvexen* Polyeder in einem linearen Raum, hat bereits Euler diesen Polyedersatz formuliert.

Alle weiteren Beweisschritte in 4 waren unabhängig von der Art des Polyeders (konvex oder nicht-konvex). Daher gilt für ausnahmslos alle Polyeder des Geschlechts 0, dass die Anzahl der dreieckigen Seitenflächen mindestens gleich 6 sein muss, damit die Anzahl der Seitenflächen die Anzahl der Ecken übersteigt.

4. Lösung für $p = 1$

Aus den gleichen Umformungen wie in Kap. 4, 6 bis 8 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(4) \qquad e &= \frac{c}{2} - f \\
f > e &\rightarrow 4f > c \\
4 \cdot \sum_{v=3}^{\infty} m(v) &> \sum_{v=3}^{\infty} v \cdot m(v) \\
0 &> \sum_{v=3}^{\infty} (v-4) \cdot m(v) \\
(5) \qquad m(3) &> \sum_{v=5}^{\infty} (v-4) \cdot m(v)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, völlig analog zu Kap. 4, 8:

$$\begin{aligned}
m(3) &> 0 \\
m(3) &\geq 1
\end{aligned}$$

Es muss also minimal 1 dreieckige Seitenflächen geben, damit ein Polyeder des Geschlechts 1 mehr Seitenflächen als Ecken haben kann.

Nun kann ein solcher Polyeder nicht nur aus einer einzigen Seitenfläche bestehen. Insofern muss er entweder a) ausschließlich weitere viereckige Seitenflächen besitzen, oder b) auch noch Seitenflächen mit mehr als 4 Ecken aufweisen.

Aus a) folgt dann allerdings für c ein ungerader Wert, und damit hätte der Polyeder eine nicht ganzzahlige Anzahl von Kanten. Dies ist, wie auch schon in Kap.4, 9.2 gezeigt wurde, nicht möglich.

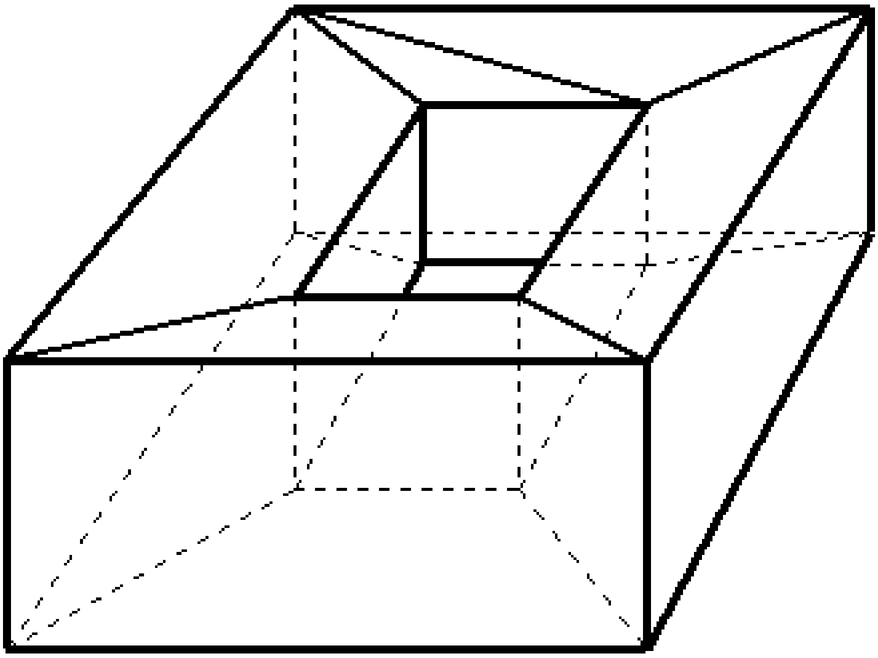
Aus b) folgt für die Ungleichung (V) allerdings, dass $m(3) > 1$ und damit, dass $m(3)$ mindestens 2 sein muss.

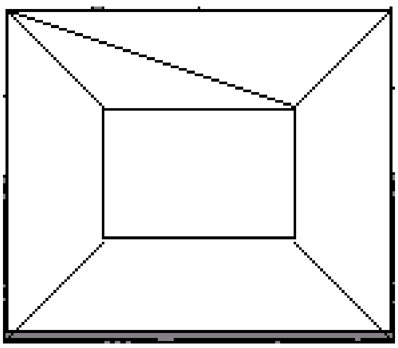
Insofern kann ein Polyeder des Geschlechts 1, der nur eine dreieckigen Seitenfläche aufweist, nicht existieren.

Für $m(3) = 2$ kann man allerdings ein Beispiel anführen: Einen Quader, dem ein zweiter Quader gleicher Höhe "herausgeschnitten" wird, und dessen Ecken geeignet verbunden werden.

Hier gilt $f = 17; e = 16; k = 33$, und damit $f + e = k + 2 \cdot 0$ sowie $f > e$

Daher reichen bei Polyedern des Geschlechts 1 nur 2 dreieckige Seitenflächen aus, damit ein Polyeder weniger Ecken als Seitenflächen hat.





5. Lösung für $p > 1$

Aus den gleichen Umformungen wie in Kap. 4, 6 - 8 ergibt sich:

$$
\begin{array}{lrcl}
(4) & e & = & \frac{c}{2} + 2 \cdot (1-p) - f \\
 & f > e & \rightarrow & 4f > c + 4 \cdot (1-p) \\
 & 4 \cdot \sum_{v=3}^{\infty} m(v) & > & 4 \cdot (1-p) + \sum_{v=3}^{\infty} v \cdot m(v) \\
 & 4 \cdot (p-1) & > & \sum_{v=3}^{\infty} (v-4) \cdot m(v) \\
(5) & m(3) + 4 \cdot (p-1) & > & \sum_{v=5}^{\infty} (v-4) \cdot m(v)
\end{array}
$$

Nun gibt es Polyeder, deren Oberfläche ausschließlich aus Vierecken gebildet wird. Für diese gilt, dass $m(v) = 0$ für $v \neq 4$ ist. Daraus folgt:

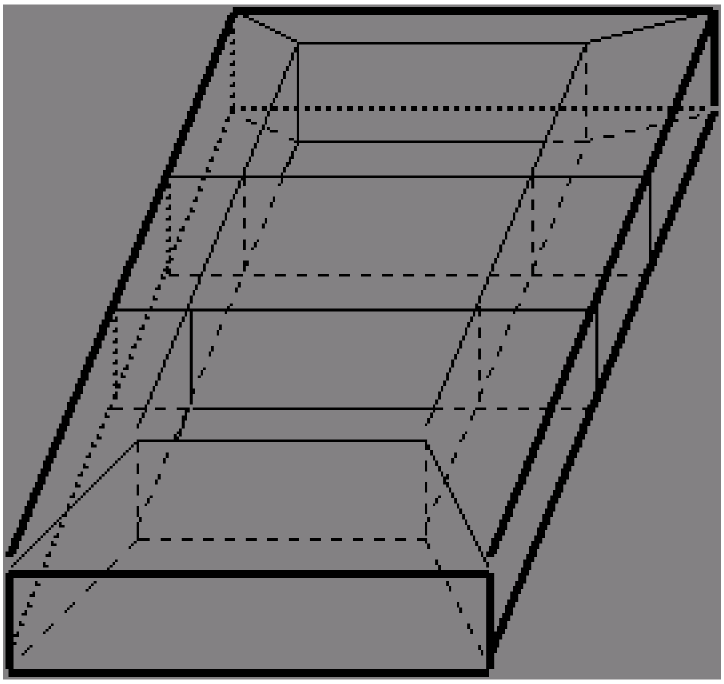
$$\begin{aligned} 0 + 4 \cdot (p-1) &> \sum_{v=5}^{\infty} (v-4) \cdot 0 \\ p &> 1 \end{aligned}$$

Dies ist -zumindest in diesem Abschnitt 5- wahr.

Daraus folgt, dass bei einem solchen Körper keine dreieckige Seitenfläche existieren muss, damit ein Polyeder des Geschlechts $p > 1$ mehr Seitenflächen als Ecken aufweist. Es reicht beispielsweise aus, wenn dieser ausschließlich aus viereckigen Seitenflächen besteht.

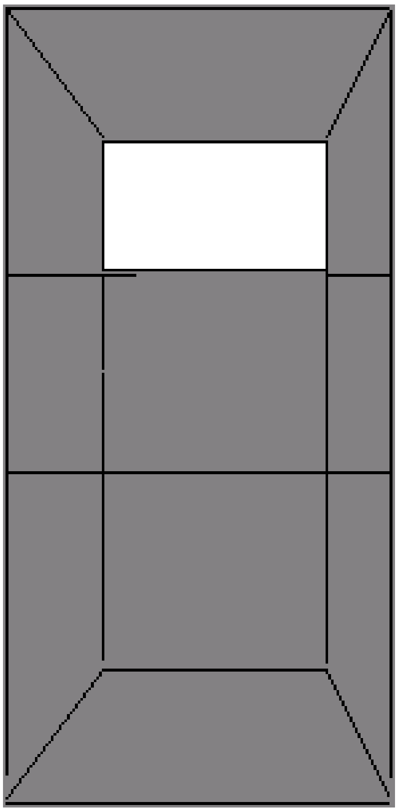
Unten ist ein Beispiel dafür abgedruckt: Ein Quader, dem zwei weitere Quader gleicher Höhe "herausgeschnitten" werden, und dessen Ecken geeignet verbunden werden.

Für diesen Polyeder gilt: $p = 2; f = 34; e = 32; k = 68$ und damit $f + e = k - 2$ sowie $f > e$



6. Ergebnis

Sofern man diese Aufgabe auf konvexe Polyeder, und damit solche des Geschlechts 0, beschränkt, so ist eine Lösung mit schulmathematischen Mitteln lösbar, wie im Abschnitt 4 gezeigt wurde.



Für nicht-konvexe Polyeder, und speziell solche höheren Geschlechts, können sich dann Fälle ergeben, in denen nicht einmal eine einzige dreieckige Seitenfläche nötig ist, um einen Polyeder mit mehr Seitenflächen als Ecken zu erhalten.

Durch Unterscheidung der drei Fälle $p = 0, p = 1$ und $p > 1$ konnte gezeigt werden, dass für die minimale Anzahl der dreieckigen Seitenflächen gilt:

$$\begin{aligned} p = 0 &\Rightarrow m(3) \geq 6 \\ p = 1 &\Rightarrow m(3) \geq 2 \\ p > 1 &\Rightarrow m(3) \geq 0 \end{aligned}$$

KAPITEL 6

Anhang

1. Tabelle der Folgen a_n und b_n bis $n = 10$ (Aufgabe 2)

n	a_n	b_n
1	1	1
2	2	1
4	5	6
5	11	30
6	41	330
7	371	13.530
8	13.901	5.019.630
9	5.033.531	69.777.876.630
10	69.782.910.161	351.229.105.131.280.530
11	351.229.174.914.190.691	24.509.789.089.304.573.335.878.465.330
a_{12}	24.509.789.089.655.802.510.792.656.021	
b_{12}	8.608.552.999.157.278.550.998.626.549.630.446.732.052.243.030	

KAPITEL 7

Literaturvereichnis

1 Friedrich Barth, Paul Mühlbauer, Dr. Friedrich Nikol, Karl Wörle: Mathematische Formeln und Definitionen; München 1990^{5}

2 Karl-August Keil, Johannes Kratz, Hans Müller, Karl Wörle: Infinitesimalrechnung 2 - Leistungskurs - Induktion (Kapitel 15.4); München 1997^{1}

3 B.L. van der Waerden: Algebra I; Berlin 1939^{9}

4 Friedrich Barth, Gert Krumbacher, Elisabeth Matschiner, Konrad Ossiander: Anschauliche Geometrie 1; München 1985^{1}

5 Wilhelm Schweizer (Hrsg.): Geometrie 2; Stuttgart 1968^{2}

6 Wilhelm Blaschke: Vorlesungen über Differenzialgeometrie I; Berlin 1930^{1}

7 Brockhaus-Enzyklopädie in 24 Bänden; Mannheim 1986-1994^{19}

Selbständigkeitserklärung. "Ich erkläre hiermit, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen als Hilfsmittel benützt habe."

Rosenheim, den 28.01.2000 - gez. Dominik Brodowski

Erstellt mit LaTeX. Diese modifizierte Fassung unterscheidet sich in Form und Inhalt von der eingereichten Facharbeit.